Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$: Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{4x + 3}{3x^2 - 15x}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 7x + 10}$: Stelle der hebbaren Lücke _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 7}{x^2 + 1}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 1} (3x^2 + 9) =$ _____

2) $\lim_{x \to -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{2x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int 4e^{-x-2}\,dx =$ _____

2) $\int 4e^{x}\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int -x^2 e^{x}\,dx =$ _____

2) $\int x^5 \ln(x)\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 3$ auf [0; 1] _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_1^{\infty} \frac{5}{x^5}\,dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt r(t) = 2 · t · (10 – t) für 0 <= t <= 10 (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 1 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 10 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -3,\ x_2 = 0$

2) $x_1 = 0,\ x_2 = 5$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-4}{x-5}\ (x \neq 2) \Rightarrow x = 2$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x - 3 + \frac{3x-4}{x^2+1} \Rightarrow y = x - 3$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 1} (3x^2 + 9) = 12$

2) $\lim_{x \to -5} \frac{x^3+125}{x+5} = 75$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{2x} = \frac{5}{2}$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 4e^{-x-2}\,dx = -4e^{-x-2} + C$

2) $\int 4e^{x}\,dx = 4e^{x} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int -x^2 e^x\,dx = (-x^2 + 2x - 2)\,e^x + C$

2) $\int x^5 \ln(x)\,dx = \frac{1}{6}x^6\ln(x) - \frac{1}{36}x^6 + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^1 (x^4 - 6x^2 + 9)\,dx = \frac{36}{5}\pi \approx 22{,}62$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{5}{4x^4}\right]_1^b = \frac{5}{4}$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $r(1) = 18\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

2) $r'(t) = 2\cdot(10-2t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 5\,\text{min}$

3) $r(5) = 50\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

4) $\int_0^{10} r(t)\,dt = 2\cdot\left[10\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = 333{,}33\,\text{l}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0