Probe-Klausur Analytische Geometrie

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 44 Note: ____

Aufgabe 1: Betrag eines Vektors (je 2 P.)

Der Betrag ist die Länge eines Vektors: die Wurzel aus $x^2 + y^2 + z^2$. Der Abstand zweier Punkte ist der Betrag ihres Verbindungsvektors. Gib Wurzeln exakt an.

1) $d(A, B)$ für $A(0 \mid 3 \mid -4)$, $B(6 \mid -3 \mid -11)$ = _____

2) $d(A, B)$ für $A(1 \mid -2 \mid -2)$, $B(2 \mid 0 \mid -4)$ = _____

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Winkel (je 3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(4 \mid -2 \mid 4) \cdot (-3 \mid -4 \mid 2)$ = _____

2) $(5 \mid -4 \mid -6) \cdot (-2 \mid 2 \mid -6)$ = _____

3) $(-4 \mid 6 \mid -6) \cdot (6 \mid 2 \mid -6)$ = _____

Aufgabe 3: Gerade durch zwei Punkte (3 P.)

Stelle eine Gleichung der Geraden durch A und B auf. Schreibe sie so: (1|2|3) + t·(4|5|6).

1) $A(1 \mid 4 \mid 1)$, $B(-5 \mid -3 \mid 2)$

Aufgabe 4: Kreuzprodukt (2 P.)

Kreuzprodukt von a = (a1 | a2 | a3) und b = (b1 | b2 | b3): (a2·b3 - a3·b2 | a3·b1 - a1·b3 | a1·b2 - a2·b1). Der Betrag des Kreuzprodukts ist der Flächeninhalt des Parallelogramms aus a und b, das Dreieck ist halb so groß.

1) $(-2 \mid 5 \mid -3) \times (-1 \mid 1 \mid 0)$ = _____

Aufgabe 5: Determinanten (je 3 P.)

Berechne die Determinante. 2×2: Hauptdiagonale mal minus Nebendiagonale mal. 3×3: Regel von Sarrus.

1) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} =$ _____

2) $\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$ _____

Aufgabe 6: Abstand Punkt–Ebene (je 5 P.)

Berechne den Abstand des Punktes Q von der Ebene E mit der Hesseschen Normalform. Gib das Ergebnis exakt an.

1) $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \quad Q(5 \mid -3 \mid -3) =$ _____

2) $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -8, \quad Q(4 \mid 2 \mid 1) =$ _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|1) + t · (4|8|1), die von Flugzeug F2 ist (45|9|5) + t · (-4|5|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von d(t)² suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 2 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Analytische Geometrie

Aufgabe 1: Betrag eines Vektors (je 2 P.)

1) $d(A,B)$ für $A(0 \mid 3 \mid -4)$, $B(6 \mid -3 \mid -11) = 11$

2) $d(A,B)$ für $A(1 \mid -2 \mid -2)$, $B(2 \mid 0 \mid -4) = 3$

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Winkel (je 3 P.)

1) $(4 \mid -2 \mid 4) \cdot (-3 \mid -4 \mid 2) = 4$

2) $(5 \mid -4 \mid -6) \cdot (-2 \mid 2 \mid -6) = 18$

3) $(-4 \mid 6 \mid -6) \cdot (6 \mid 2 \mid -6) = 24$

Aufgabe 3: Gerade durch zwei Punkte (3 P.)

1) $\vec{x} = (1 \mid 4 \mid 1) + t \cdot (-6 \mid -7 \mid 1)$

Aufgabe 4: Kreuzprodukt (2 P.)

1) $(-2 \mid 5 \mid -3) \times (-1 \mid 1 \mid 0) = (3 \mid 3 \mid 3)$

Aufgabe 5: Determinanten (je 3 P.)

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = -8$

2) $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2$

Aufgabe 6: Abstand Punkt–Ebene (je 5 P.)

1) $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \quad Q(5 \mid -3 \mid -3) = d = \frac{10}{3}$

2) $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -8, \quad Q(4 \mid 2 \mid 1) = d = \frac{13}{3}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{16 + 64 + 1} = 9 \frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 540 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha \approx 6{,}38^\circ$

3) $(0|0|1) + 2 \cdot (4|8|1) = (8|16|3)$

4) $d(t)^2 = |(-45| - 9| - 4) + t \cdot (8|3|1)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 5{,}28\,\text{min}$

5) $d(5{,}28) \approx 7{,}49\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 42	ab 40	ab 38	ab 36	ab 33	ab 31	ab 29	ab 27	ab 25	ab 22	ab 20	ab 18	ab 15	ab 12	ab 9	ab 0