Probe-Klausur Analytische Geometrie

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 44 Note: ____

Aufgabe 1: Betrag eines Vektors (je 2 P.)

Der Betrag ist die Länge eines Vektors: die Wurzel aus $x^2 + y^2 + z^2$. Der Abstand zweier Punkte ist der Betrag ihres Verbindungsvektors. Gib Wurzeln exakt an.

1) $d(A, B)$ für $A(3 \mid -3 \mid -1)$, $B(-3 \mid 4 \mid -7)$ = _____

2) $d(A, B)$ für $A(1 \mid -5 \mid 2)$, $B(5 \mid -17 \mid -1)$ = _____

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Winkel (je 3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(0 \mid 3 \mid -2) \cdot (-4 \mid 6 \mid 2)$ = _____

2) $(-3 \mid 5 \mid 1) \cdot (-2 \mid 5 \mid -6)$ = _____

3) $(-1 \mid -4 \mid 2) \cdot (1 \mid 3 \mid -1)$ = _____

Aufgabe 3: Gerade durch zwei Punkte (3 P.)

Stelle eine Gleichung der Geraden durch A und B auf. Schreibe sie so: (1|2|3) + t·(4|5|6).

1) $A(2 \mid 3 \mid -2)$, $B(1 \mid -2 \mid 1)$

Aufgabe 4: Kreuzprodukt (2 P.)

Kreuzprodukt von a = (a1 | a2 | a3) und b = (b1 | b2 | b3): (a2·b3 - a3·b2 | a3·b1 - a1·b3 | a1·b2 - a2·b1). Der Betrag des Kreuzprodukts ist der Flächeninhalt des Parallelogramms aus a und b, das Dreieck ist halb so groß.

1) $(0 \mid -2 \mid 0) \times (-5 \mid 3 \mid -2)$ = _____

Aufgabe 5: Determinanten (je 3 P.)

Berechne die Determinante. 2×2: Hauptdiagonale mal minus Nebendiagonale mal. 3×3: Regel von Sarrus.

1) $\det\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} =$ _____

2) $\det\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} =$ _____

Aufgabe 6: Abstand Punkt–Ebene (je 5 P.)

Berechne den Abstand des Punktes Q von der Ebene E mit der Hesseschen Normalform. Gib das Ergebnis exakt an.

1) $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1, \quad Q(1 \mid 2 \mid -3) =$ _____

2) $E: 3x_2 + 4x_3 = 11, \quad Q(2 \mid -1 \mid -3) =$ _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|2) + t · (12|4|3), die von Flugzeug F2 ist (32|2|4) + t · (-8|7|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Analytische Geometrie

Aufgabe 1: Betrag eines Vektors (je 2 P.)

1) $d(A, B)$ für $A(3 \mid -3 \mid -1)$, $B(-3 \mid 4 \mid -7) = 11$

2) $d(A, B)$ für $A(1 \mid -5 \mid 2)$, $B(5 \mid -17 \mid -1) = 13$

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Winkel (je 3 P.)

1) $(0 \mid 3 \mid -2) \cdot (-4 \mid 6 \mid 2) = 14$

2) $(-3 \mid 5 \mid 1) \cdot (-2 \mid 5 \mid -6) = 25$

3) $(-1 \mid -4 \mid 2) \cdot (1 \mid 3 \mid -1) = -15$

Aufgabe 3: Gerade durch zwei Punkte (3 P.)

1) $\vec{x} = (2 \mid 3 \mid -2) + t \cdot (-1 \mid -5 \mid 3)$

Aufgabe 4: Kreuzprodukt (2 P.)

1) $(0 \mid -2 \mid 0) \times (-5 \mid 3 \mid -2) = (4 \mid 0 \mid -10)$

Aufgabe 5: Determinanten (je 3 P.)

1) $\det \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 12$

2) $\det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = -40$

Aufgabe 6: Abstand Punkt–Ebene (je 5 P.)

1) $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1, \quad Q(1 \mid 2 \mid -3) = d = \frac{10}{9}$

2) $E: 3x_2 + 4x_3 = 11, \quad Q(2 \mid -1 \mid -3) = d = \frac{26}{5}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13 \frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin \alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13{,}34^\circ$

3) $(0|0|2) + 3 \cdot (12|4|3) = (36|12|11)$

4) $d(t)^2 = |(-32| - 2| - 2) + t \cdot (20| - 3|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 1{,}53\,\text{min}$

5) $d(1{,}53) \approx 7{,}22\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 42	ab 40	ab 38	ab 36	ab 33	ab 31	ab 29	ab 27	ab 25	ab 22	ab 20	ab 18	ab 15	ab 12	ab 9	ab 0