Spickzettel: Analysis

Ableitungsregeln

Potenzregel

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Faktor- und Summenregel

$(c \cdot f)' = c \cdot f' \qquad (f + g)' = f' + g'$

Produktregel

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Kettenregel

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

äußere mal innere Ableitung

Wichtige Ableitungen

$(e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$

Wurzel, Exponent

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

Kurvendiskussion

Extremstelle

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

f´´ < 0 Hochpunkt, f´´ > 0 Tiefpunkt

Wendestelle

$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Monotonie

$f'(x) > 0$: steigend $\qquad f'(x) < 0$: fallend

Tangente

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Normale

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Gebrochenrational

Zählergrad < Nennergrad : $y = 0$

gleich: Quotient der Leitkoeffizienten; um 1 größer: schiefe Asymptote

Polstelle

Nenner 0, Zähler $\neq 0$

sonst evtl. hebbare Lücke

Krümmung

$f''(x) > 0$: linksgekrümmt $\qquad f''(x) < 0$: rechtsgekrümmt

Extremwertaufgabe

Hauptbedingung, Nebenbedingung, Zielfunktion ableiten

Ränder des Definitionsbereichs prüfen

Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Näherung für Nullstellen

Integralrechnung

Stammfunktion

$F'(x) = f(x)$

Grundintegrale

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \int e^x\,dx = e^x + C \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Hauptsatz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Fläche zwischen Graphen

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

an Schnittstellen aufteilen

Mittelwert

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Lineare Substitution

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

Partielle Integration

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

Rotationsvolumen

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

Grenzwerte und Folgen

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

Arithmetische Folge

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrische Folge

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Geometrische Reihe

$$s = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$