Spickzettel: Quadratische Gleichungen

Formen

Allgemeine Form

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Normalform

$x^2 + px + q = 0$

durch a teilen

Reinquadratisch

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Wurzel ziehen, beide Vorzeichen

Ohne Absolutglied

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 5$

ausklammern

Satz vom Nullprodukt

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

Beispiel

$(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -2$

Normalform herstellen

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \ | :3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

erst sortieren, dann durch a teilen

Lösungsformeln

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel

$x^2 - 6x + 8 = 0:\ x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$

x1 = 4, x2 = 2

abc-Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mitternachtsformel

Beispiel

$$2x^2 + 3x - 2 = 0:\ x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

x1 = 0,5, x2 = –2

Diskriminante

$D = b^2 - 4ac$

D > 0: zwei, D = 0: eine, D < 0: keine Lösung

Diskriminante (pq)

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Keine Lösung

$x^2 + 2x + 5 = 0:\ D = 1 - 5 < 0$

Parabel schneidet die x-Achse nicht

Doppelte Lösung

$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

Scheitel liegt auf der x-Achse

Weitere Verfahren

Satz von Vieta

$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$

Beispiel Vieta

$x^2 - 7x + 12 = 0:\ 3 + 4 = 7,\ 3 \cdot 4 = 12$

Quadratische Ergänzung

$x^2 + 6x = 7 \Rightarrow (x+3)^2 = 16 \Rightarrow x = -3 \pm 4$

Linearfaktoren

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

Substitution

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0:\ z = x^2 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$

z = 1, z = 4, also x = ±1, ±2

Faktorisieren mit Vieta

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

zwei Zahlen mit Produkt –6 und Summe 1

Bruchgleichung

$$\frac{6}{x} = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

mit x malnehmen, x != 0 beachten

Ungleichung

$x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \qquad x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2$ oder $x > 2$

Parabeln

Scheitelpunktform

$f(x) = a(x-d)^2 + e$

Scheitelpunkt S(d | e)

Von der Normalform

$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$

S(2 | –3)

Scheitel aus Normalform

$x_S = -\frac{p}{2} \qquad x_S = -\frac{b}{2a}$

Öffnung

$a > 0$: nach oben $\qquad a < 0$: nach unten

|a| > 1 schmaler, |a| < 1 breiter

Nullstellen

$f(x) = 0$ lösen

Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkt zweier Graphen

$f(x) = g(x)$ gleichsetzen

Symmetrieachse

$x = x_S$

genau zwischen den Nullstellen

Parabel und Gerade

$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -1$

zwei, ein oder kein Schnittpunkt

Anwendung

$A = x(10 - x)$ maximal bei $x = 5$

Scheitelpunkt liefert den größten Wert