Spickzettel: Mathe für das Studium

Logik und Mengen

Und, oder, nicht

$A \wedge B \qquad A \vee B \qquad \neg A$

Implikation

$A \Rightarrow B \;\equiv\; \neg A \vee B$

nur falsch, wenn A wahr und B falsch ist

De Morgan

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Mengen

$A \cap B \qquad A \cup B \qquad \varnothing \subset A$

Intervalle

$[a;b] = \{x \mid a \le x \le b\}$

runde Klammer: Grenze gehört nicht dazu

Summen und Induktion

Gaußsche Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

für q ungleich 1

Vollständige Induktion

Anfang: $A(1)$ Schritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Grenzwerte und Reihen

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Regel von L'Hospital

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nur bei 0/0 oder unendlich/unendlich

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für |q| < 1

Taylorpolynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit

$i^2 = -1 \qquad z = a + bi$

Betrag und konjugiert

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \bar{z} = a - bi$

Multiplizieren

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Polarform

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$

Eulersche Identität

$e^{i\pi} + 1 = 0$

Lineare Algebra, DGL, Modulo

Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$\det(A - \lambda E) = 0$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Wachstums-DGL

$y' = k \cdot y \;\Rightarrow\; y(x) = C \cdot e^{kx}$

Trennung der Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y) \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

Kongruenz

$a \equiv b \pmod{n} \;\Leftrightarrow\; n \mid (a - b)$