Spickzettel: Vektoren und Analytische Geometrie

Grundlagen

Verbindungsvektor
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Spitze minus Fuß

Betrag
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Abstand zweier Punkte
$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$

Mittelpunkt
$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

Einheitsvektor
$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Kollinear
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$

Vektoren sind Vielfache voneinander

Produkte

Skalarprodukt
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Orthogonal
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Winkel
$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Kreuzprodukt
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

steht senkrecht auf beiden

Flächen
$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

Spatvolumen
$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Pyramide: ein Sechstel

Geraden und Ebenen

Gerade
$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$

Lage zweier Geraden
identisch, parallel, schneidend, windschief

Richtungsvektoren vergleichen, dann gleichsetzen

Ebene (Parameterform)
$E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Normalenform
$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

Koordinatenform
$E : n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$

Schnitt Gerade – Ebene
Geradenpunkt in die Koordinatenform einsetzen

Punktprobe
$\vec{q} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ nach t lösen

gleiches t in allen Zeilen: Punkt liegt auf g

Ebene aus drei Punkten
$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \quad d = \vec{n} \cdot \vec{a}$

Spurpunkte
$S_1 : x_2 = x_3 = 0$ setzen

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Abstände und Winkel

Punkt – Ebene
$d = \frac{|n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3 - d|}{|\vec{n}|}$

Hessesche Normalform

Punkt – Gerade
Lotfußpunkt: $(\vec{f} - \vec{q}) \cdot \vec{u} = 0$

Winkel Gerade – Ebene
$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Winkel Ebene – Ebene
$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Matrizen

Determinante 2 × 2
$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Inverse 2 × 2
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Lösbarkeit
$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar